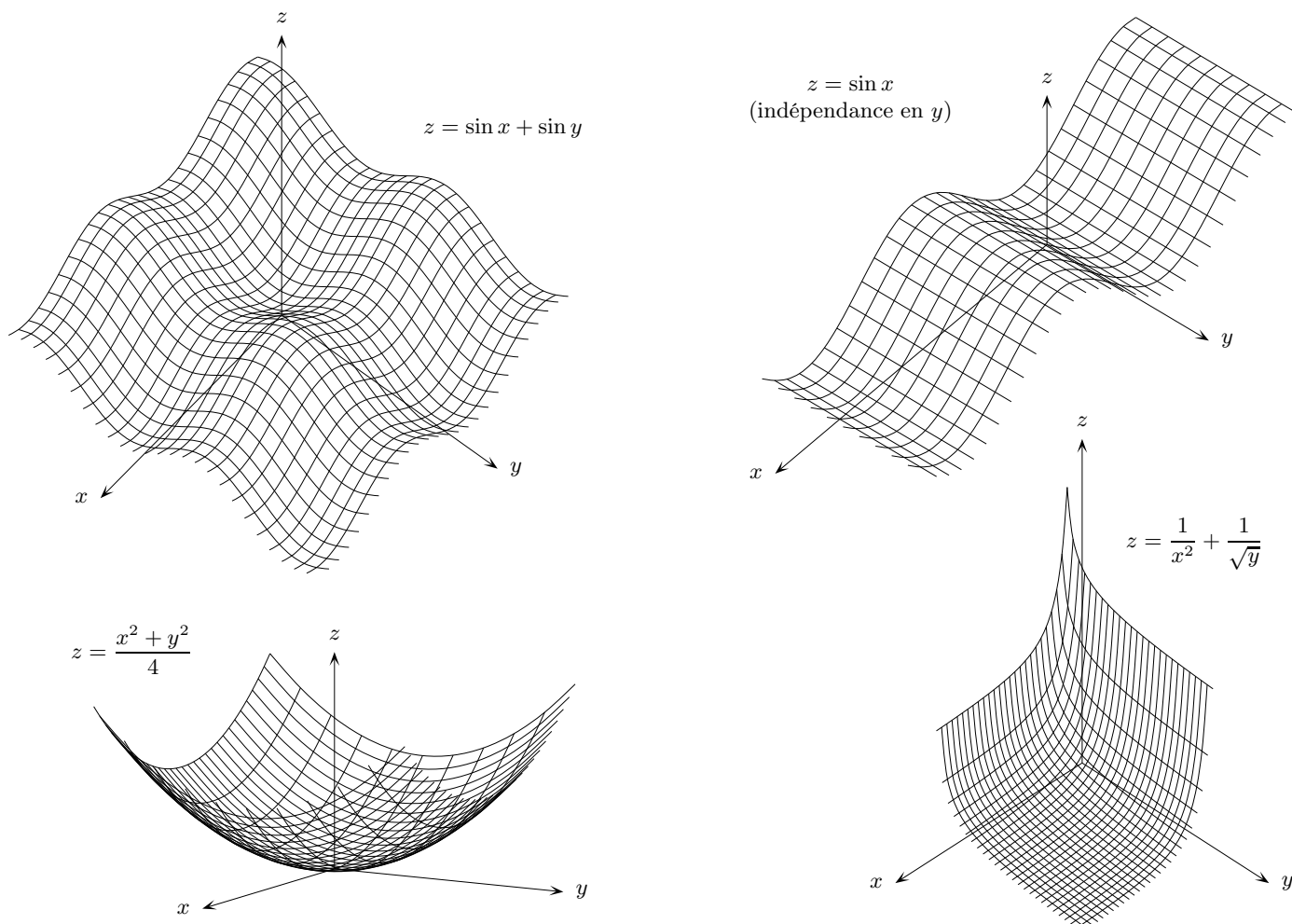


FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis de leur structure euclidienne canonique. On utilisera librement les notations usuelles O , $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

Nous allons dans ce chapitre étudier succinctement les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Nous chercherons à étendre à ces fonctions les notions de limite, continuité, dérivabilité, etc. Jusqu'ici nous avons réservé ces notions aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que nous savions bien représenter comme des « courbes », pour le dire vite. Les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ seront quant à elles représentées par des « surfaces », comme l'illustrent les figures ci-dessous.



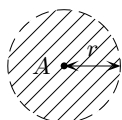
1 RUDIMENTS DE TOPOLOGIE DANS $\mathbb{R}^2$

Ce paragraphe est une introduction — très brève — à une branche fondamentale des mathématiques appelée *topologie*. La topologie est, pour le dire vite, la théorie grâce à laquelle il est possible de définir une notion de proximité entre deux points via la notion de *voisinage* d'un point. On ne peut pas faire moins si on veut pouvoir introduire les notions de *limite*, *continuité*...

1.1 OUVERTS DE $\mathbb{R}^2$

Définition (Boule ouverte, boule fermée) Soit $A \in \mathbb{R}^2$.

- Pour tout $r > 0$, on appelle *boule ouverte de centre A et de rayon r* l'ensemble $BO(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 / d(A, M) < r\}$.
- Pour tout $r \geq 0$, on appelle *boule fermée de centre A et de rayon r* l'ensemble $BF(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 / d(A, M) \leq r\}$.

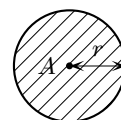


$BO(A, r)$

Le bord du disque est **exclu**.

$BF(A, r)$

Le bord du disque est **inclus**.



🐞 🐞 🐞 **Explication** Ce sont surtout les boules ouvertes qui vont nous intéresser, mais ce n'est pas du tout leur « rondeur » qui va nous être utile : ce qui compte, c'est que la boule $BO(A, r)$ contient tous les points assez proches de A . Cette idée sera formalisée plus loin quand nous définirons la notion de *voisinage*.

Exemple Pour tout $A \in \mathbb{R}^2$, la boule fermée $BF(A, 0)$ coïncide avec le singleton $\{A\}$.

Définition (Ouvert) Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que Ω est un *ouvert* (ou une *partie ouverte*) si :

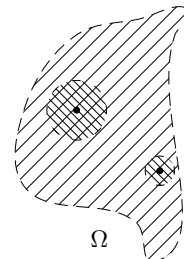
$$\forall A \in \Omega, \quad \exists r > 0 / \quad BO(A, r) \subseteq \Omega ;$$

cela revient à dire qu'il existe, autour de tout point A de Ω , une boule ouverte de centre A incluse dans Ω .

🐞 🐞 🐞 **Explication**

Un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est une partie de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle tous les points ont de la place autour d'eux. On peut faire un tour complet autour de chaque point sans sortir de l'ouvert.

On peut se représenter les ouverts en pensant que ce sont des taches qui ne contiennent pas leur frontière.



Théorème (Exemples fondamentaux d'ouverts)

- (i) Toute boule ouverte est un ouvert.
- (ii) Le complémentaire de toute boule fermée est un ouvert.
En particulier, pour tout $A \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{A\}$ est un ouvert.
- (iii) Tout produit de deux intervalles ouverts est un ouvert.

Démonstration

- (i) Soient $A \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. Montrons que $BO(A, r)$ est un ouvert. Soit donc B un point de $BO(A, r)$. Nous devons montrer que $BO(A, r)$ contient une boule ouverte de centre B .

Puisque $d(A, B) < r$, posons $\rho = \frac{r - d(A, B)}{2} > 0$ et montrons que $BO(B, \rho) \subseteq BO(A, r)$. Soit donc M un point de $BO(B, \rho)$. Montrer que $M \in BO(A, r)$ revient à montrer que $d(A, M) < r$. Mais c'est facile :

$$d(A, M) \stackrel{\text{Inégalité triangulaire}}{\leq} d(A, B) + d(B, M) < d(A, B) + \rho = d(A, B) + \frac{r - d(A, B)}{2} = \frac{r + d(A, B)}{2} < \frac{r + r}{2} = r.$$

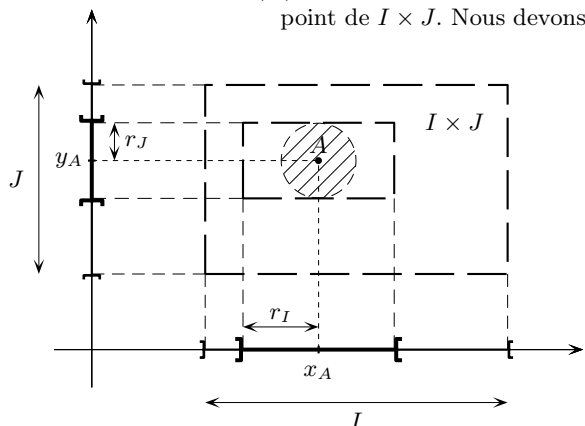
- (ii) Soient $A \in \mathbb{R}^2$ et $r \geq 0$. Montrons que $\mathbb{R}^2 \setminus BF(A, r)$ est un ouvert. Soit donc B un point de $\mathbb{R}^2 \setminus BF(A, r)$. Nous devons montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus BF(A, r)$ contient une boule ouverte de centre B .

Puisque $d(A, B) > r$, posons $\rho = \frac{d(A, B) - r}{2} > 0$ et montrons que $BO(B, \rho) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus BF(A, r)$. Soit donc M un point de $BO(B, \rho)$. Montrer que $M \in \mathbb{R}^2 \setminus BF(A, r)$ revient à montrer que $d(A, M) > r$. Or d'après l'inégalité triangulaire : $d(A, B) \leq d(A, M) + d(M, B) < d(A, M) + \rho$, donc :

$$d(A, M) > d(A, B) - \rho = d(A, B) - \frac{d(A, B) - r}{2} = \frac{r + d(A, B)}{2} > \frac{r + r}{2} = r.$$

Pour le cas particulier de $\mathbb{R}^2 \setminus \{A\}$ où A est un point de $\mathbb{R}^2$, nous avons déjà observé que $BF(A, 0) = \{A\}$.

- (iii) Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Montrons que $I \times J$ est un ouvert. Soit donc $A = (x_A, y_A)$ un point de $I \times J$. Nous devons montrer que $I \times J$ contient une boule ouverte de centre A .



Or $x_A \in I$ et I est ouvert, donc $]x_A - r_I, x_A + r_I[\subseteq I$ pour un certain $r_I > 0$. De même $]y_A - r_J, y_A + r_J[\subseteq J$ pour un certain $r_J > 0$. Posons alors $r = \min \{r_I, r_J\} > 0$ et montrons que $BO(A, r) \subseteq I \times J$. Soit donc $M = (x, y)$ un point de $BO(A, r)$. Il nous reste à montrer que $M \in I \times J$. Or $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = d(A, M)^2 < r^2$, donc $(x - x_A)^2 < r^2$, et donc : $|x - x_A| < r < r_I$. De même : $|y - y_A| < r < r_J$.

Finalement :
$$\begin{cases} x \in]x_A - r_I, x_A + r_I[\subseteq I \\ y \in]y_A - r_J, y_A + r_J[\subseteq J \end{cases}.$$

Et voilà : $(x, y) = M \in I \times J$ comme voulu. ■

1.2 VOISINAGES D'UN POINT DANS $\mathbb{R}^2$

Définition (Voisinage d'un point) Soit $A \in \mathbb{R}^2$. On appelle *voisinage de A* toute partie de $\mathbb{R}^2$ contenant une boule ouverte de centre A .

☞ ☞ ☞ **Explication** Cette définition est à peu de choses près la même que celle que nous avons donnée dans $\mathbb{R}$. Les intervalles ouverts y sont remplacés par leurs analogues dans $\mathbb{R}^2$: les boules ouvertes. Bien évidemment, il n'y a pas de voisinage de l'infini dans $\mathbb{R}^2$, car il n'y a tout simplement pas de point ∞ dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple Dire qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ est ouverte, c'est exactement dire qu'elle est un voisinage de chacun de ses points.

1.3 LIMITE D'UNE FONCTION DÉFINIE SUR UNE PARTIE DE $\mathbb{R}^2$

Définition (Limite en un point d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$) Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ une application, $A \in \mathcal{A}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite en A si :

pour tout voisinage $\mathcal{V}_\ell$ de ℓ , il existe un voisinage $\mathcal{V}_A$ de A tel que : $\forall M \in \mathcal{V}_A \cap \mathcal{A}, \quad f(M) \in \mathcal{V}_\ell$.

On peut montrer qu'en cas d'existence une telle limite est unique ; on la note alors $\lim_{M \rightarrow A} f(M)$ ou $\lim_A f$.

Selon que ℓ est fini ou infini, cette définition générale admet trois réécritures plus pratiques :

- **Cas où $\ell \in \mathbb{R}$:** $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists r > 0 / \quad \forall M \in \mathcal{A}, \quad d(A, M) < r \implies |f(M) - \ell| < \varepsilon$;
- **Cas où $\ell = \infty$:** $\forall B > 0, \quad \exists r > 0 / \quad \forall M \in \mathcal{A}, \quad d(A, M) < r \implies f(M) > B$;
- **Cas où $\ell = -\infty$:** $\forall B < 0, \quad \exists r > 0 / \quad \forall M \in \mathcal{A}, \quad d(A, M) < r \implies f(M) < B$.

Cette nouvelle notion de limite jouit de la plupart des propriétés de la notion de limite d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: opérations (somme, produit, inverse), passage à la limite et inégalités, théorème des gendarmes... En outre une fonction possédant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point. Les démonstrations de ces résultats sont exactement celles que nous avons vues en cours d'année. Par exemple, soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications et $A \in \mathcal{A}$. Si $\lim_A f = \ell \in \mathbb{R}$ et si $\lim_A g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\lim_A (f + g) = \ell + \ell'$.

En effet Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $r > 0$ tel que pour tout $M \in \mathcal{A}$: $d(A, M) < r \implies |f(M) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$.

De même, il existe $r' > 0$ tel que pour tout $M \in \mathcal{A}$: $d(A, M) < r' \implies |g(M) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $r_0 = \min\{r, r'\}$. Alors pour tout $M \in \mathcal{A}$ tel que $d(A, M) < r_0$:

$$|(f + g)(M) - (\ell + \ell')| \leq |f(M) - \ell| + |g(M) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \text{C'est le résultat voulu.}$$

Exemple $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{x^2 + y^2 + y^4} = 0$.

En effet Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ de coordonnées polaires (r, θ) où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\left| \frac{x^4}{x^2 + y^2 + y^4} \right| = \frac{r^4 \cos^4 \theta}{r^2 + r^4 \sin^4 \theta} = \frac{r^2 \cos^4 \theta}{1 + r^2 \sin^4 \theta} \leq r^2 = x^2 + y^2.$$

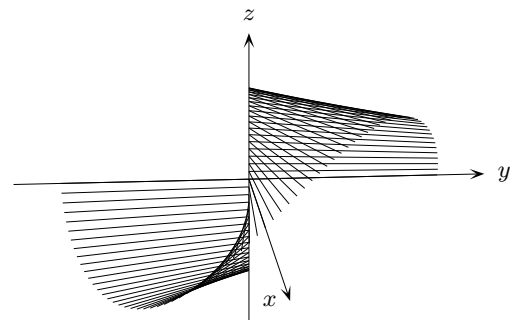
Or $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) = 0$. Le résultat découle donc aussitôt du théorème des gendarmes.

Exemple On note f l'application $(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$ de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dans $\mathbb{R}$. Alors f ne possède pas de limite en $(0, 0)$.

Ce résultat se visualise assez bien. Pour tout $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ de coordonnées polaires (r, θ) :

$$f(M) = f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{r^2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} = \frac{\sin(2\theta)}{2}.$$

Le réel $f(M)$ ne dépend donc que de θ et non de r . On peut construire le graphe de f comme un « faisceau tournant » de demi-droites, comme on peut le voir ci-contre.



En effet Si $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ existe, alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,0)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,x)$ existent aussi et ont la même valeur. Or :

$$f(x,0) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad f(x,x) = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}, \quad \text{donc comme } 0 \neq \frac{1}{2}, \quad f \text{ n'a pas de limite en } (0,0).$$

✕ ✕ ✕ Attention ! Faire tendre (x,y) vers (x_A, y_A) ne revient pas à faire tendre x vers x_A puis y vers y_A — ou le contraire. Par exemple, $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$ et $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$, mais pourtant, comme on vient de le voir, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ n'existe pas.

1.4 CONTINUITÉ D'UNE FONCTION DÉFINIE SUR UNE PARTIE DE $\mathbb{R}^2$

Définition (Continuité) Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Soit $A \in \mathcal{A}$. On dit que f est *continue en A* si f possède une limite en A . Dans ce cas, $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = f(A)$.
- On dit que f est *continue sur $\mathcal{A}$* si elle est continue en tout point de $\mathcal{A}$.
- L'ensemble des fonctions de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $\mathcal{A}$ est noté $\mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$.

Exemple Les fonctions $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

En effet Démontrons-le pour $f : (x,y) \mapsto x$. Soient $A = (x_A, y_A)$ un point et $\varepsilon > 0$.

Pour tout point $M = (x,y) : |f(M) - f(A)| = |x - x_A| \leq \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} = d(A, M)$.

Posons donc $r = \varepsilon$. Alors pour tout point M , comme voulu : $d(A, M) < r \implies |f(M) - f(A)| < \varepsilon$.

✕ ✕ ✕ Attention ! Pour montrer qu'une fonction de **deux variables** $(x,y) \mapsto f(x,y)$ est continue en un point $A = (x_A, y_A)$, il ne suffit pas de montrer que ses applications partielles $x \mapsto f(x, y_A)$ et $y \mapsto f(x_A, y)$ le sont respectivement en x_A et y_A .

Reprenons par exemple la fonction $f : (x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ étudiée ci-dessus, prolongée en $(0,0)$ par $f(0,0) = 0$. Les applications partielles $x \mapsto f(x,0) = 0$ et $y \mapsto f(0,y) = 0$ sont continues en 0 mais f elle-même n'est pas continue en $(0,0)$, puisqu'on a vu qu'elle n'a pas de limite en $(0,0)$. Cette discontinuité se visualise d'ailleurs assez bien sur la figure précédente.

Théorème (Opérations sur les fonctions continues)

- **Combinaison linéaire, produit, inverse :** Toute combinaison linéaire et tout produit de fonctions continues sont continus, et l'inverse d'une fonction continue **ne s'annulant pas** est continue.
- **Composition :** Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}^2$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. On suppose que $f(\mathcal{A}) \subseteq I$. Alors $\varphi \circ f \in \mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$.

Démonstration Autre manière d'énoncer le théorème sur les opérations sur les limites dans le cas fini. ■

Exemple Toute fonction polynomiale de deux variables est continue sur $\mathbb{R}^2$.

En effet Nous avons déjà montré que les fonctions $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, et par ailleurs toute fonction polynomiale de deux variables est une combinaison linéaire de produits de la forme $(x,y) \mapsto x^m y^n$ où $m, n \in \mathbb{N}$.

Exemple L'application norme $X \mapsto \|X\|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

En effet C'est juste une composition : la fonction polynomiale $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ d'après l'exemple précédent et la fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple Soient I et J deux intervalles, $\varphi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $\psi \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$. On pose, pour tout $(x,y) \in I \times J$:

$$\begin{cases} S(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) \\ P(x,y) = \varphi(x)\psi(y) \end{cases}$$

Alors S et P sont continues sur $I \times J$.

En effet La fonction $(x,y) \mapsto x$ est continue sur $I \times J$ à valeurs dans I et φ l'est sur I , donc par composition $(x,y) \mapsto \varphi(x)$ est continue sur $I \times J$. De même $(x,y) \mapsto \psi(y)$ est continue sur $I \times J$. Finalement S est continue sur $I \times J$ par somme de ces deux fonctions, et P par produit.

2 COMMENT « DÉRIVER » UNE FONCTION DE $\mathbb{R}^2$ DANS $\mathbb{R}$?

On appelle *calcul différentiel* la théorie mathématique dont le discours porte sur la « dérivabilité » des fonctions. Encore faut-il, bien entendu, disposer d'une notion claire de « dérivabilité ». Pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la chose est connue. Qu'en est-il pour les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$? Vous ne répondrez réellement à cette question qu'en deuxième année, quand vous étudierez la notion de *fonction différentiable*. Pour l'heure, notre objectif est un peu moindre : nous souhaitons seulement justifier un certain nombre d'usages que vous avez appris en physique (dérivées partielles, notations dx , dt , dp , $dV \dots$).

2.1 DÉRIVÉES DIRECTIONNELLES

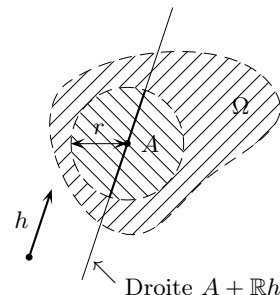
Définition (Dérivée directionnelle) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application, $A \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^2$. On dit que f est *dérivable en A dans la direction h* si la limite $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A+th) - f(A)}{t}$ existe et est finie ; en d'autres termes, si la fonction $t \mapsto f(A+th)$, définie au voisinage de 0, est dérivable en 0.

Quand elle existe et est finie, cette limite est appelée le *nombre dérivé de f en A dans la direction h* , noté $D_h f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial h}(A)$.

Démonstration Si $h = \vec{0}$, la fonction $t \mapsto f(A+th) = f(A)$ est définie et constante sur $\mathbb{R}$, donc dérivable en 0, et on obtient alors $\frac{\partial f}{\partial \vec{0}}(A) = 0$. Supposons donc $h \neq \vec{0}$.

Pourquoi la fonction $t \mapsto f(A+th)$ est-elle alors définie **au voisinage de 0** ? Il est important qu'elle le soit si l'on veut pouvoir parler de sa dérivabilité en 0.

En fait, cela résulte du caractère ouvert de Ω . En effet, Ω contient une certaine boule $BO(A, r)$, où $r > 0$. Posons alors $\alpha = \frac{r}{\|h\|}$, ce qui est possible car h est non nul. Dans ce cas, pour tout $t \in]-\alpha, \alpha[$: $d(A, A+th) = \|(A+th) - A\| = \|th\| = |t| \cdot \|h\| < \alpha \|h\| = r$, donc $A+th \in BO(A, r) \subseteq \Omega$. Comme voulu, $f(A+th)$ bien défini pour $t \in]-\alpha, \alpha[$. ■



⌘ ⌘ ⌘ **Explication** Que représente géométriquement le nombre dérivé de f en A dans la direction h ?

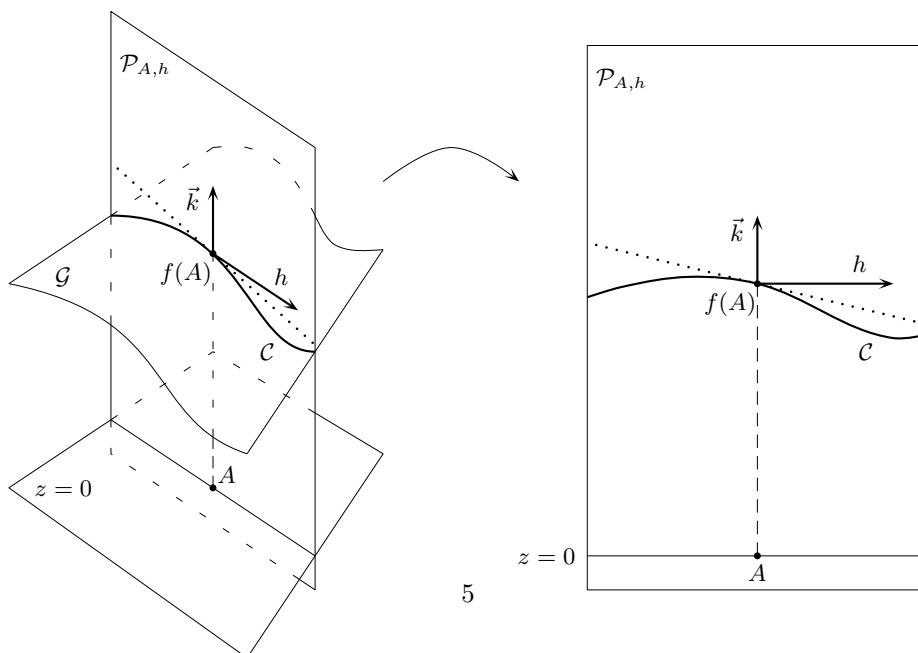
1) Considérez, dans $\mathbb{R}^3$, le graphe $\mathcal{G}$ de f : $\mathcal{G} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in \Omega \text{ et } z = f(x, y)\}$.

2) Coupez-le sans ménagement au moyen du plan « vertical » $\mathcal{P}_{A,h}$ passant par A et dirigé par les deux vecteurs non colinéaires h et $\vec{k}$. — En toute rigueur, h est un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Mais si nous identifions $\mathbb{R}^2$ au plan « horizontal » de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 0$, alors h peut être vu comme un vecteur de $\mathbb{R}^3$ dont la troisième composante est nulle.

3) Observez attentivement le résultat de cette coupure, i.e. l'intersection de $\mathcal{G}$ avec $\mathcal{P}_{A,h}$: c'est une courbe $\mathcal{C}$ du plan « vertical » $\mathcal{P}_{A,h}$.

4) Concentrez-vous désormais uniquement sur le plan $\mathcal{P}_{A,h}$ et la courbe $\mathcal{C}$; oubliez le reste de l'espace. Munissez ce plan du repère $(A, h, \vec{k})$.

5) Concluons. La courbe $\mathcal{C}$ n'est autre que le graphe de la fonction $t \mapsto f(A+th)$ et la fonction $t \mapsto \frac{f(A+th) - f(A)}{t}$ est quant à elle le taux d'accroissement en 0 de cette fonction. S'il existe, $D_h f(a) = \frac{\partial f}{\partial h}(A)$ est donc le coefficient directeur dans la base $(h, \vec{k})$ de la tangente en 0 à $\mathcal{C}$. Cette tangente est représentée ci-dessous à l'aide de petits points.



Exemple On note f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ x & \text{si } y = 0. \end{cases}$

Alors f est dérivable dans toutes les directions en $(0, 0)$, mais pourtant f n'est pas continue en $(0, 0)$.

En effet

- Clairement f n'est pas continue en $(0, 0)$, car $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = 1 \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0)$.
- Soit $h = (x_h, y_h) \in \mathbb{R}^2$ non nul. Montrons que f est dérivable en $O = (0, 0)$ dans la direction h .

$$\text{Pour tout } t \in \mathbb{R}^* : \quad \frac{f(O + th) - f(O)}{t} = \frac{f(tx_h, ty_h)}{t} = \begin{cases} \frac{(tx_h)^2}{t \times (ty_h)} = \frac{x_h^2}{y_h} = f(h) & \text{si } y_h \neq 0 \\ \frac{tx_h}{t} = x_h = f(h) & \text{si } y_h = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons bien sûr faire tendre t vers 0 dans ces expressions constantes, de sorte que f est dérivable en $(0, 0)$ dans la direction h . Ici, en l'occurrence : $\frac{\partial f}{\partial h}(0, 0) = f(h)$.

× × × Attention ! Les fonctions de deux variables ne semblent pas aussi gentilles que les fonctions d'une variable ! L'exemple précédent montre qu'une fonction a beau être dérivable dans toutes les directions en un point, elle peut très bien n'être même pas continue en ce point.

Que faut-il en fait en conclure ? Que nous n'avons pas encore mis la main sur le bon concept de dérivabilité pour les fonctions de deux variables. Ce bon concept, qui s'appelle *différentiabilité* et que vous étudierez l'an prochain, sera plus fort que la continuité.

2.2 DÉRIVÉES PARTIELLES

Définition (Dérivées partielles) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application et $A \in \Omega$. S'il existe, le réel $D_{\vec{i}}f(A) = \frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(A)$ est appelé *première dérivée partielle de f en A* et généralement noté $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$ ou $D_1f(A)$.

Même chose pour la notion de *deuxième dérivée partielle* — remplacer $\vec{i}$ par $\vec{j}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$ par $\frac{\partial f}{\partial y}(A)$ ou $D_2f(A)$.

En pratique Montrer que f possède en $A = (x_A, y_A)$ une première dérivée partielle, c'est montrer que la limite $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_A + t, y_A) - f(x_A, y_A)}{t} = \lim_{x \rightarrow x_A} \frac{f(x, y_A) - f(x_A, y_A)}{x - x_A}$ existe et est finie. Cela revient à affirmer la dérivabilité de la fonction $x \mapsto f(x, y_A)$ en x_A et calculer la dérivée associée. En résumé, calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ revient à dériver f par rapport à sa première variable, l'autre variable étant « gelée ». — Même chose pour la deuxième dérivée partielle.

Exemple On note f l'application $\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto e^{xy} \end{cases}$.

Alors f a des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy}$.

× × × Attention ! Une fonction a beau avoir des première et deuxième dérivées partielles en un point donné, elle n'en a pas pour autant continue en ce point. En effet, nous avons vu qu'elle n'est même pas forcément continue quand elle possède des dérivées dans toutes les directions.

Théorème (Opérations sur les dérivées partielles) On se contente d'énoncer le cas des premières dérivées partielles.

(i) **Combinaison linéaire, produit, inverse :** Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications. On suppose que f et g possèdent une première dérivée partielle sur Ω . Alors c'est aussi le cas de toute combinaison linéaire de f et g ainsi que du produit fg , et de plus pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda f + \mu g) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x}g + f \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Egalement, si f ne s'annule pas sur Ω , $\frac{1}{f}$ possède une première dérivée partielle sur Ω et : $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f^2}$.

(ii) **Composition :** Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \Omega \rightarrow I$ et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications. On suppose que $f(\Omega) \subseteq I$. Si f possède une première dérivée partielle sur Ω et si φ est dérivable sur I , alors $\varphi \circ f$ est possédée une première dérivée partielle sur Ω et : $\frac{\partial}{\partial x}(\varphi \circ f) = \frac{\partial f}{\partial x} \times \varphi' \circ f$.

Démonstration Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème sur les opérations sur les dérivées, puisqu'une dérivée partielle n'est jamais qu'une dérivée au sens traditionnel — l'une des deux variables étant « gelée » dans le calcul, on est ramené à des calculs de dérivées classiques. ■

2.3 GRADIENT

Définition (Gradient) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application et $A \in \Omega$. On suppose que f possède des dérivées partielles en A (sous-entendu : première et deuxième). On appelle alors *gradient de f en A* le **vecteur** $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A)\right)$ de $\mathbb{R}^2$, noté $\nabla f(A)$ ou $\text{grad}f(A)$. Le symbole ∇ se lit « nabla ».

Le théorème suivant est une réécriture du précédent sur les dérivées partielles. Son énoncé reste volontairement schématique.

Théorème (Opérations sur les gradients)

$$\nabla(\lambda f + \mu g) = \lambda \nabla f + \mu \nabla g, \quad \nabla(fg) = g \nabla f + f \nabla g, \quad \nabla\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2} \nabla f \quad \text{et} \quad \nabla(\varphi \circ f) = \varphi' \circ f \times \nabla f.$$

3 FONCTIONS DE CLASSE $\mathcal{C}^1$

3.1 DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Définition (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est *de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω* si f possède des dérivées partielles sur Ω qui sont continues sur Ω .

On note $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple Les fonctions $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

En effet Démontrons-le pour $f : (x, y) \mapsto x$. Les applications $x \mapsto x$ et $y \mapsto x$ (où $x \in \mathbb{R}$ est fixé) étant dérivables sur $\mathbb{R}$, nous pouvons affirmer que f possède des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$, et que de plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$. Ces deux fonctions étant continues sur $\mathbb{R}^2$ puisqu'elles sont constantes, nous pouvons bien affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème (Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$)

- **Combinaison linéaire, produit, inverse :** Toute combinaison linéaire et tout produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, et l'inverse d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ **ne s'annulant pas** est de classe $\mathcal{C}^1$.
- **Composition :** Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. On suppose que $f(\Omega) \subseteq I$. Alors $\varphi \circ f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Exemple Toute fonction polynomiale de deux variables est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

En effet Même preuve que pour la continuité.

Exemple La fonction norme $X \mapsto \|X\|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ — pas en $(0, 0)$ a priori, attention !

En effet Pour commencer, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est ouvert d'après un résultat vu au début de ce chapitre.

La fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ **à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$** et la fonction racine carrée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ — d'où le résultat par composition.

Exemple La fonction $(x, y) \mapsto e^{-x} \ln(y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

En effet Pour commencer, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ est ouvert en tant que produit de deux intervalles ouverts.

La fonction $(x, y) \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc par composition $(x, y) \mapsto e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. De même $(x, y) \mapsto \ln y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour finir on fait un produit.

La suite du chapitre repose en grande partie sur le résultat ci-dessous, dont la preuve est explicitement hors programme.

Théorème (Existence de développements limités d'ordre 1 pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $A \in \Omega$. Alors f possède un *développement limité à l'ordre 1 au voisinage de A* ; précisément :

$$f(A+h) \underset{h \rightarrow \vec{0}}{=} f(A) + (\nabla f(A)|h) + o(\|h\|), \quad \text{ou encore :} \quad f(X) \underset{X \rightarrow A}{=} f(A) + (\nabla f(A)|X-A) + o(\|X-A\|).$$

On peut aussi détailler les choses de la façon suivante :

$$f(x, y) \underset{(x, y) \rightarrow A}{=} f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_A) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_A) + o(\|(x - x_A, y - y_A)\|).$$

Démonstration Fixons $A = (x_A, y_A) \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$. Comme Ω est ouvert, nous pouvons nous donner $\rho > 0$ pour lequel $BO(A, \rho) \subseteq \Omega$. Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ étant continues sur Ω par hypothèse, il existe des réels $r_x > 0$ et $r_y > 0$, que nous pouvons choisir inférieurs à ρ , tels que pour tout $h = (x_h, y_h) \in \mathbb{R}^2$:

$$\|h\| < r_x \implies \left| \frac{\partial f}{\partial x}(A+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(A) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \|h\| < r_y \implies \left| \frac{\partial f}{\partial y}(A+h) - \frac{\partial f}{\partial y}(A) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons alors $r = \min\{r_x, r_y\}$. Soit $h = (x_h, y_h) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|h\| < r$.

$$\begin{aligned} |f(A+h) - f(A) - (\nabla f(A)|h)| &= \left| f(x_A + x_h, y_A + y_h) - f(x_A, y_A) - x_h \frac{\partial f}{\partial x}(x_A, y_A) - y_h \frac{\partial f}{\partial y}(x_A, y_A) \right| \\ &= \left| \left(f(x_A + x_h, y_A + y_h) - f(x_A, y_A + y_h) \right) - x_h \frac{\partial f}{\partial x}(x_A, y_A) + \left(f(x_A, y_A + y_h) - f(x_A, y_A) \right) - y_h \frac{\partial f}{\partial y}(x_A, y_A) \right| \\ &= \left| \int_0^{x_h} \frac{\partial f}{\partial x}(x_A + s, y_A + y_h) \, ds - \int_0^{x_h} \frac{\partial f}{\partial x}(x_A, y_A) \, ds + \int_0^{y_h} \frac{\partial f}{\partial y}(x_A, y_A + t) \, dt - \int_0^{y_h} \frac{\partial f}{\partial y}(x_A, y_A) \, dt \right| \\ &\quad \text{d'après le théorème fondamental de l'analyse} \\ &\leq \left| \int_0^{x_h} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_A + s, y_A + y_h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_A, y_A) \right) \, ds \right| + \left| \int_0^{y_h} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_A, y_A + t) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_A, y_A) \right) \, dt \right|. \end{aligned}$$

Or pour tout $s \in [-x_h, x_h]$, $\|(s, y_h)\| = \sqrt{s^2 + y_h^2} \leq \sqrt{x_h^2 + y_h^2} = \|h\| < r \leq r_x$, et pour tout $t \in [-y_h, y_h]$, $\|(0, t)\| = |t| \leq |y_h| \leq \sqrt{x_h^2 + y_h^2} = \|h\| < r \leq r_y$. Du coup :

$$|f(A+h) - f(A) - (\nabla f(A)|h)| \leq |x_h| \frac{\varepsilon}{2} + |y_h| \frac{\varepsilon}{2} \leq \|h\| \frac{\varepsilon}{2} + \|h\| \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \|h\|.$$

Nous avons donc trouvé $r > 0$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^2$ non nul : $\|h\| < r \implies \frac{|f(A+h) - f(A) - (\nabla f(A)|h)|}{\|h\|} \leq \varepsilon$.

En d'autres termes $\lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{f(A+h) - f(A) - (\nabla f(A)|h)}{\|h\|} = 0$, i.e. $f(A+h) - f(A) - (\nabla f(A)|h) \underset{h \rightarrow \vec{0}}{=} o(\|h\|)$. ■

Corollaire (Continuité d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. Alors $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$.

Démonstration D'après le développement limité à l'ordre 1 du théorème précédent, on obtient en particulier à l'ordre 0 la limite $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = f(A)$ pour tout $A \in \Omega$, i.e. la continuité de f en A . ■

3.2 PLAN TANGENT

Définition (Plan tangent) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $A = (x_A, y_A) \in \Omega$. Le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation :

$$z = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_A) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_A) \quad \text{est appelé le plan tangent de } f \text{ en } A.$$

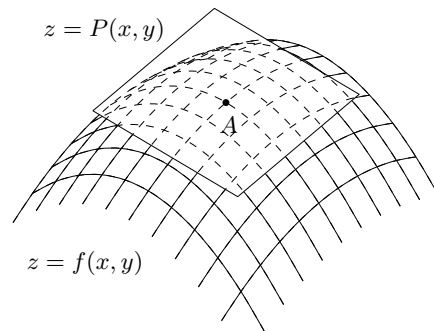
☺ ☺ ☺ **Explication** Dans le cas d'une variable, nous avons montré qu'une fonction φ dérivable possède en tout point a un développement limité d'ordre 1 : $\varphi(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \varphi(a) + \varphi'(a)(x-a) + o(x-a)$. La partie « $\varphi(a) + \varphi'(a)(x-a)$ » du développement limité s'interprète alors comme l'équation de la tangente de φ en a , $y = \varphi(a) + \varphi'(a)(x-a)$.

Que se passe-t-il donc avec deux variables ? Le graphe d'une fonction de deux variables étant une surface plutôt qu'une courbe, on substitue à la notion de droite tangente celle de plan tangent.

Le développement limité de f au voisinage de A à l'ordre 1 s'écrit :

$$f(x, y) \underset{(x, y) \rightarrow (A)}{=} \underbrace{f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_A) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_A)}_{P(x, y)} + o(\|(x - x_A, y - y_A)\|).$$

Ce résultat indique qu'au voisinage de A , f est pratiquement égale à la fonction P . Or que représente P ? Le graphe de la fonction P n'est autre que le plan d'équation $z = P(x, y)$. Le graphe d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ ressemble donc au voisinage de tout point à un plan.



Exemple La fonction $(x, y) \mapsto \sin(x + y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et son plan tangent en $(0, 0)$ a pour équation $z = x + y$.

En effet Notons f cette fonction. La fonction $(x, y) \mapsto x + y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ comme fonction polynomiale de deux variables et la fonction sinus l'est sur $\mathbb{R}$, donc par composition $(x, y) \mapsto \sin(x + y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Ensuite, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos(x + y)$.

Du coup, le plan tangent en $(0, 0)$ a pour équation : $z = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y = x + y$.

3.3 COMPOSITION D'UNE FONCTION DE $\mathbb{R}$ DANS $\mathbb{R}^2$ SUIVIE D'UNE FONCTION DE $\mathbb{R}^2$ DANS $\mathbb{R}$

La maîtrise pratique du résultat suivant est l'un des objectifs majeurs de ce chapitre.

Théorème (Composition d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ suivie d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $x, y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. On suppose que $(x(t), y(t)) \in \Omega$ pour tout $t \in I$ et on pose : $F(t) = f(x(t), y(t))$. Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et pour tout $t \in I$:

$$F'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)). \quad \text{En résumé : } \frac{dF}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

☺ ☺ ☺ **Explication** Je vous recommande vivement de retenir la forme résumée, mais seulement si vous savez retrouver correctement à partir d'elle la formule complète. Les quantités à rajouter ne sont pas partout les mêmes : $\frac{dx}{dt}(t) = x'(t)$ à la place de $\frac{dx}{dt}$, mais $\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))$ à la place de $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Démonstration Notons φ la fonction $t \mapsto (x(t), y(t))$, de sorte que $F = f \circ \varphi$. Soit $t \in I$. Composons le développement limité de f au voisinage de $\varphi(t)$ à l'ordre 1 avec la limite $\lim_{h \rightarrow 0} (\varphi(t+h) - \varphi(t)) = (0, 0)$.

$$F(t+h) = f(\varphi(t+h)) = f(\varphi(t) + (\varphi(t+h) - \varphi(t))) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(\varphi(t)) + (\nabla f(\varphi(t)) | \varphi(t+h) - \varphi(t)) + o(\|\varphi(t+h) - \varphi(t)\|).$$

$$\text{Or : } \frac{\|\varphi(t+h) - \varphi(t)\|}{h} = \sqrt{\left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right)^2 + \left(\frac{y(t+h) - y(t)}{h}\right)^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}, \text{ donc on peut}$$

remplacer tout $o(\|\varphi(t+h) - \varphi(t)\|)$ par un $o(h)$. Du coup :

$$\begin{aligned} F(t+h) &\underset{h \rightarrow 0}{=} F(t) + \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) (x(t+h) - x(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t)) (y(t+h) - y(t)) + o(h) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} F(t) + \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) (hx'(t) + o(h)) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t)) (hy'(t) + o(h)) + o(h) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} F(t) + h \left(x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t)) \right) + o(h). \end{aligned}$$

Ce calcul prouve que F est dérivable en t et que $F'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t))$. L'expression de F' ainsi obtenue est enfin naturellement continue sur Ω . ■

⚡ ⚡ ⚡ **Explication** Les remarques qui suivent méritent un sérieux coup de œil. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est *homogène de degré* α si pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda > 0$: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y)$ ★. Donnons-nous une fois pour toutes une telle fonction f , que nous supposons de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Parce que la relation ★ fait intervenir trois variables, il est légitime de vouloir la dériver par rapport à chacune d'entre elles — on en gèle deux pendant que l'une varie. Il convient cependant d'éviter deux erreurs classiques :

- 1) Quand on dérive ★ par rapport à x , il est tentant d'écrire un « $\frac{\partial f(\lambda x, \lambda y)}{\partial x}$ ». Cette notation n'a hélas **AUCUN SENS** ! Vous ne la trouverez nulle part dans ce cours. Seule la notation $\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x, \lambda y)$ est correcte — où l'on dérive une **fonction** f et non une **expression** $f(\lambda x, \lambda y)$ — mais elle relève d'un autre calcul puisqu'on n'y tient pas compte des dérivées de λx et λy dans la composition.
- 2) Quand on dérive ★ par rapport à λ , il est tentant de faire intervenir un « $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ ». C'est juste **ABOMINABLE** ! La fonction f étant fonction de **deux** variables, elle ne peut avoir que **deux** dérivées partielles : la **première** notée $D_1 f$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}$, et la **deuxième** notée $D_2 f$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}$. Le choix des lettres x et y est purement conventionnel, mais une fois qu'on a choisi deux lettres, c'est fini : on n'en change plus.

Bon, mais alors comment on fait puisqu'il n'y a rien qu'on ait le droit de faire ?

- **Dérivation par rapport à x** : Dériver $f(\lambda x, \lambda y)$ par rapport à x , c'est finalement dériver un terme de la forme « $f(x(t), y(t))$ » comme dans le théorème précédent, mais avec ici x à la place de t . On obtient la relation :

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x, \lambda y) + 0 \times \frac{\partial f}{\partial y}(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

Cette égalité vraie pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda > 0$ montre que la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est homogène de degré $(\alpha - 1)$.

- **Dérivation par rapport à y** : Même calcul qu'à l'instant à l'inversion près des rôles symétriques de x et y . On obtient la relation : $\frac{\partial f}{\partial y}(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha-1} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, qui signifie que la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ est homogène de degré $(\alpha - 1)$.

- **Dérivation par rapport à λ** : Dériver $f(\lambda x, \lambda y)$ par rapport à λ revient encore à dériver un terme de la forme « $f(x(t), y(t))$ », mais avec ici λ à la place de t . On obtient la relation : $x \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x, \lambda y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(\lambda x, \lambda y) = \alpha \lambda^{\alpha-1} f(x, y)$.

Comme $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont homogènes de degré $(\alpha - 1)$, on peut simplifier un peu :

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y). \quad \text{Cette identité est appelée le théorème d'Euler.}$$

3.4 DÉRIVÉES DIRECTIONNELLES ET GRADIENT D'UNE FONCTION DE CLASSE $\mathcal{C}^1$

Théorème (Dérivées directionnelles et gradient d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, $A \in \Omega$ et $h = (x_h, y_h) \in \mathbb{R}^2$. Alors f possède une dérivée en A dans la direction h et :

$$D_h f(A) = \frac{\partial f}{\partial h}(A) = (\nabla f(A) | h) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) x_h + \frac{\partial f}{\partial y}(A) y_h.$$

⚡ ⚡ ⚡ **Explication** Dire que f est de classe $\mathcal{C}^1$, c'est dire que f admet des dérivées partielles et que celles-ci sont continues ; c'est donc dire que f possède une dérivée continue dans les directions $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Le théorème ci-dessus affirme que l'existence et la continuité de ces deux dérivées directionnelles suffisent à prouver l'existence de toutes les dérivées directionnelles de f .

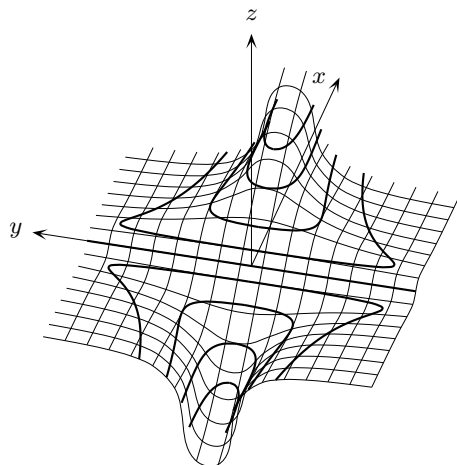
Démonstration Posons $A = (x_A, y_A)$ et $h = (x_h, y_h)$ et notons F la fonction $t \mapsto f(A + th)$. Comme Ω est ouvert, cette fonction est définie sur un voisinage $] -\alpha, \alpha[$ de 0. Posons enfin pour tout $t \in] -\alpha, \alpha[$: $x(t) = x_A + tx_h$ et $y(t) = y_A + ty_h$, de façon à avoir : $F(t) = f(x(t), y(t))$.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et que x et y le sont sur $] -\alpha, \alpha[$, nous avons vu précédemment que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\alpha, \alpha[$ et que : $F'(0) = x'(0) \frac{\partial f}{\partial x}(x(0), y(0)) + y'(0) \frac{\partial f}{\partial y}(x(0), y(0)) = x_h \frac{\partial f}{\partial x}(A) + y_h \frac{\partial f}{\partial y}(A) = (\nabla f(A) | h)$.

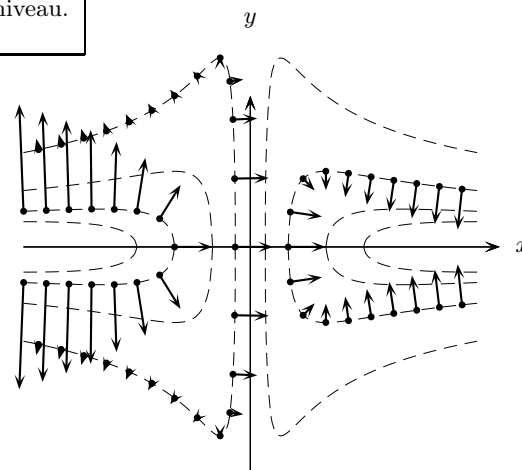
Le résultat découle alors de la définition des dérivées directionnelles, puisque : $F'(0) = D_h f(A) = \frac{\partial f}{\partial h}(A)$. ■

🐞🐞🐞 **Explication** Tâchons d'interpréter géométriquement la notion de gradient. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. Un réel λ étant fixé, notons $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe de niveau λ de f : $\mathcal{C}_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = \lambda\}$. Supposons que $\mathcal{C}_\lambda$ est non vide et peut être paramétrée par une courbe paramétrée $\varphi = (x, y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un certain intervalle I , dont tous les points sont réguliers. Alors pour tout $M \in \mathbb{R}^2$: $M \in \mathcal{C}_\lambda \iff \exists t \in I / M = \varphi(t)$, donc pour tout $t \in I$: $f \circ \varphi(t) = \lambda$. Dérivons enfin cette identité : $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t)) y'(t) = 0$, ou encore : $(\nabla f(\varphi(t)) | \varphi'(t)) = 0$. Comme la tangente de φ en t est dirigée par $\varphi'(t)$ — on a supposé $\varphi(t)$ régulier — cette égalité signifie que le gradient de f en $\varphi(t)$ est orthogonal à la tangente de φ en t . On résume généralement ce résultat de la manière suivante :

Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau.



On voit de plus que le gradient est dirigé dans le sens des pentes croissantes, et que plus la pente est forte, plus le gradient est grand en norme.



3.5 DIFFÉRENTIELLE D'UNE FONCTION DE CLASSE $\mathcal{C}^1$

En physique, vous avez souvent rencontré des « infiniment petits » notés dx , df , dT , dt ... dont la nature et l'usage ont pu vous laisser parfois perplexes. Comment le mathématicien définit-il formellement de tels objets ?

Définition (Différentielle d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$.

- Pour tout $A \in \Omega$, l'application $\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ h & \longmapsto D_h f(A) \end{cases}$ est une forme linéaire de $\mathbb{R}^2$. On l'appelle la *différentielle de f en A* et on la note df_A .
- L'application $\begin{cases} \Omega & \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \\ A & \longmapsto df_A \end{cases}$ est appelée la *différentielle de f sur Ω* et notée df .

Démonstration L'application df_A n'est autre que l'application $h \mapsto (\nabla f(A) | h)$. Elle est linéaire parce que le produit scalaire l'est lui-même par rapport à sa deuxième variable. ■

⚡⚡⚡ **Attention !** Nous disposons — hélas ? — de multiples notations d'un même objet. Pour tout $A \in \Omega$ et pour tout $h = (x_h, y_h) \in \mathbb{R}^2$: $df_A(h) = D_h f(A) = \frac{\partial f}{\partial h}(A) = (\nabla f(A) | h) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) x_h + \frac{\partial f}{\partial y}(A) y_h$. Risque de confusions !

🐞🐞🐞 **Explication** Cette définition propre de la notation différentielle df est assez décevante au premier abord. Pour commencer elle est compliquée : df associe, à tout point de Ω , une forme linéaire de $\mathbb{R}^2$. Mais par ailleurs, quel rapport entre cette définition et celle du physicien ? Pour le physicien, df représente une variation infinitésimale de f . Et ici ?

Ecrivons le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage d'un point $A \in \Omega$ fixé : $f(A + h) \underset{h \rightarrow \vec{0}}{=} f(A) + df_A(h) + o(\|h\|)$.

Ce développement montre que la quantité $df_A(h)$ représente la variation de f au point A induite par une variation de vecteur h , à l'ordre 1. Comme toujours, le physicien, qui confond allègrement les fonctions et leurs valeurs, écrit « df » au lieu de « $df_A(h)$ » : à ses yeux, quand on passe du point A au point $A + h$ avec h tout petit, la variation de correspondante de f est tout simplement df .

Exemple Notons X la fonction « première coordonnée » $(x, y) \mapsto x$, définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $A \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $h = (x_h, y_h) \in \mathbb{R}^2$: $dX_A(h) = \frac{\partial X}{\partial x}(A) x_h + \frac{\partial X}{\partial y}(A) y_h = 1 \times x_h + 0 \times y_h = x_h = X(h)$, d'où l'égalité : $dX_A = X$. La différentielle dX de X sur $\mathbb{R}^2$ est donc l'application — constante ici — qui, à tout point $A \in \mathbb{R}^2$, associe la fonction X . Cela dit, au lieu de X et dX , on emploie généralement les notations x et dx . C'est un peu confus car les variables de X sont aussi notées (x, y) , mais après tout dx représente bien une variation de la première coordonnée.

Théorème (Opérations sur les différentielles) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f, g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- (i) $d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg$, $d(fg) = g df + f dg$, et si f ne s'annule pas sur Ω : $d\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{df}{f^2}$.
- (ii) $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$.

Démonstration

(i) Montrons seulement la formule « $d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg$ ». Pour tout $A \in \Omega$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} d(\lambda f + \mu g)_A(h) &= (\nabla(\lambda f + \mu g)(A)|h) = (\lambda \nabla f(A) + \mu \nabla g(A)|h) = \lambda(\nabla f(A)|h) + \mu(\nabla g(A)|h) \\ &= \lambda df_A(h) + \mu dg_A(h) = (\lambda df_A + \mu dg_A)(h), \end{aligned}$$

donc $d(\lambda f + \mu g)_A = \lambda df_A + \mu dg_A$, puis $d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg$ comme voulu.

(ii) Comme on l'a vu dans l'exemple précédent, pour tout $A \in \Omega$ et pour tout $h = (x_h, y_h) \in \mathbb{R}^2$:

$$df_A(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) x_h + \frac{\partial f}{\partial y}(A) y_h = \frac{\partial f}{\partial x}(A) dx_A(h) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) dy_A(h) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A) dx_A + \frac{\partial f}{\partial y}(A) dy_A \right)(h),$$

$$\text{donc } df_A = \frac{\partial f}{\partial x}(A) dx_A + \frac{\partial f}{\partial y}(A) dy_A, \text{ et enfin } df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \quad \blacksquare$$

3.6 COMPOSITION D'UNE FONCTION DE $\mathbb{R}^2$ DANS $\mathbb{R}^2$ SUIVIE D'UNE FONCTION DE $\mathbb{R}^2$ DANS $\mathbb{R}$

Théorème (Composition d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ suivie d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$) Soient U et Ω deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, $u, v \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. On suppose que $(u(x, y), v(x, y)) \in \Omega$ pour tout $(x, y) \in U$ et on pose : $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$. Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U , et pour tout $(x, y) \in U$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial u}(u(x, y), v(x, y)) + \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial v}(u(x, y), v(x, y))$$

$$\text{et } \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \frac{\partial f}{\partial u}(u(x, y), v(x, y)) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \frac{\partial f}{\partial v}(u(x, y), v(x, y)).$$

En résumé : $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v}$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial v}$.

🔗 🔗 🔗 **Explication** Eh non, ce ne sont pas de nouvelles formules à apprendre, car tout est déjà contenu dans le théorème « $\frac{dF}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial f}{\partial y}$ ». Par exemple, si vous dérivez l'égalité $F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ par rapport à x grâce à ce théorème — y étant fixé — vous trouvez justement : $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v}$. C'est d'ailleurs exactement ce qu'on va faire dans la preuve ci-dessous, avec un peu plus de rigueur.

Démonstration Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ revient à montrer que $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ sont bien définies et continues. Nous le prouverons seulement pour $\frac{\partial F}{\partial x}$. Fixons $A = (x_A, y_A) \in U$ et $r > 0$ tel que $BO(A, r) \subseteq U$. Si X et Y désignent les fonctions $x \mapsto u(x, y_A)$ et $x \mapsto v(x, y_A)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]x_A - r, x_A + r[$, alors $F(x, y_A) = f(X(x), Y(x))$ pour tout $x \in]x_A - r, x_A + r[$. Le théorème de composition d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ suivie d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ montre alors que $x \mapsto F(x, y_A)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]x_A - r, x_A + r[$, et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x_A, y_A) &= X'(x_A) \frac{\partial f}{\partial u}(X(x_A), Y(x_A)) + Y'(x_A) \frac{\partial f}{\partial v}(X(x_A), Y(x_A)) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_A, y_A) \frac{\partial f}{\partial u}(u(x_A, y_A), v(x_A, y_A)) + \frac{\partial v}{\partial x}(x_A, y_A) \frac{\partial f}{\partial v}(u(x_A, y_A), v(x_A, y_A)). \end{aligned}$$

Comme par ailleurs u, v et f sont de classe $\mathcal{C}^1$, cette formule montre que $\frac{\partial F}{\partial x}$ est continue sur U . ■

Corollaire (Coordonnées cartésiennes/coordonnées polaires) Soient $R > 0$ et $f \in \mathcal{C}^1(BO(O, R), \mathbb{R})$.

On pose, pour tout $(r, \theta) \in]-R, R[\times \mathbb{R}$: $F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[\times \mathbb{R}$ et pour tout $(r, \theta) \in]-R, R[\times \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

$$\text{En résumé :} \quad \frac{\partial F}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}.$$

🐞 🐞 🐞 **Explication** Le physicien écrirait quant à lui : $\frac{\partial f}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}$ avec f à la place de F . C'est un abus de notation, certes, mais parfaitement justifié si on sait ce qu'on fait. Pour le physicien en effet, f et F représentent une même grandeur physique, mais qu'on peut décrire de deux manières : en coordonnées cartésiennes ou en coordonnées polaires.

Démonstration Simple application du théorème précédent avec $u : (r, \theta) \mapsto r \cos \theta$ et $v : (r, \theta) \mapsto r \sin \theta$. ■

3.7 EXTRÊMA LOCAUX

Définition (Extrémum local) Soient $\mathcal{A}$ une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ une application et $A \in \mathcal{A}$.

- On dit que f possède un *maximum local* en A si f est majorée par $f(A)$ au voisinage de A .
- On dit que f possède un *minimum local* en A si f est minorée par $f(A)$ au voisinage de A .

Théorème (Extrémum local d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $A \in \Omega$. Si f possède en A un extrémum local en A , les dérivées directionnelles de f en A sont toutes nulles. Enoncé équivalent : $df_A = 0$.

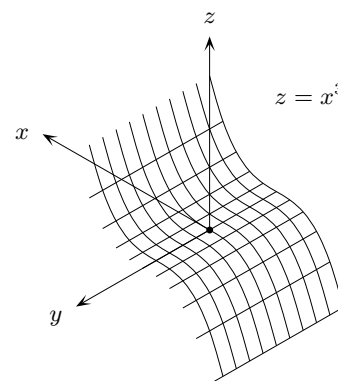
🚫 🚫 🚫 Attention !

La réciproque est fautive : la nullité de toutes les dérivées directionnelles n'implique pas la présence d'un extrémum local. Cela ne doit pas vous étonner car cette réciproque était déjà fautive dans le cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Par exemple, si f est la fonction $(x, y) \mapsto x^3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ pour

tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Du coup, pour tout $h = (x_h, y_h) \in \mathbb{R}^2$:

$df_{(0,0)}(h) = \frac{\partial f}{\partial h}(0, 0) = x_h \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + y_h \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Ainsi toutes les dérivées directionnelles de f sont nulles en $(0, 0)$, ou encore $df_{(0,0)} = 0$.



Démonstration Plaçons-nous dans le cas où f possède en A un maximum local. Les dérivées directionnelles de f en A sont toutes définies car f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω .

Soit $h \in \mathbb{R}^2$. La fonction $g_h : t \mapsto f(A + th)$ est définie et majorée par $g_h(0) = f(A)$ au voisinage de 0. Elle présente donc un maximum local en A , et comme elle est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0, nous savons qu'alors $g'_h(0) = 0$. Or par définition, $D_h f(A) = \frac{\partial f}{\partial h}(A) = g'_h(0) = 0$. C'est terminé. ■

🔍 🔍 🔍 **En pratique** Comment détermine-t-on les extrêma locaux d'une fonction de deux variables ? Vous en saurez plus l'année prochaine sur le sujet. A notre niveau nous devons nous contenter de la méthode suivante :

- 1) Conformément au théorème précédent, la résolution du système des deux équations $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ nous permet de délimiter notre champ de recherche : les extrêma locaux sont forcément parmi les solutions trouvées, mais il est possible que toutes ne conviennent pas car le théorème précédent ne donnait qu'une implication, pas une équivalence.
- 2) Il convient ensuite, au cas par cas, de déterminer quelles solutions sont bien des extrêma locaux.

Exemple La fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 - 2x + xy + y^2$, définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, admet pour seul extrêmu local un minimum local en $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

En effet

- **Analyse :** Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Faisons l'hypothèse que f possède un extrêmu local en (x, y) . Dans ce cas $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, ou encore :
$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \quad \text{Après calcul : } (x, y) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$
- **Synthèse :** Le point $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ est-il vraiment un extrêmu local de f ? A ce stade, il se peut très bien que ce ne soit pas le cas. Pour trancher, nous devons comparer $f(x, y)$ et $f\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ pour (x, y) voisin de $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Cela revient à étudier le signe de $f\left(\frac{4}{3} + h, -\frac{2}{3} + k\right) - f\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ pour (h, k) voisin de $(0, 0)$. Il est plus facile de travailler au voisinage de $(0, 0)$ intuitivement, et plus facile aussi d'étudier un signe. Or pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$:
$$f\left(\frac{4}{3} + h, -\frac{2}{3} + k\right) - \frac{4}{3} = h^2 + hk + k^2 = \left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k^2}{4} \geq 0. \quad \text{Conclusion :}$$
$$\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) \text{ est un minimum local de } f.$$

4 FONCTIONS DE CLASSE $\mathcal{C}^2$

Définition (Dérivées partielles secondes) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On suppose que f possède une première dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur Ω . Soit $A \in \Omega$.

- Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ possède une première dérivée partielle en A , on pose :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (A).$$
- Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ possède une deuxième dérivée partielle en A , on pose :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (A).$$

On dispose bien sûr d'une définition analogue pour $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Exemple On note f la fonction $(x, y) \mapsto e^{xy^2}$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Alors f possède des dérivées partielles secondes sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et précisément, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = y^4 e^{xy^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = (4x^2 y^2 + 2x) e^{xy^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2y(xy^2 + 1)e^{xy^2}.$$

On peut remarquer que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sont égales. Nous généraliserons cette remarque dans un instant.

Définition (Fonction de classe $\mathcal{C}^2$) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω si f possède des dérivées partielles secondes sur Ω qui sont continues sur Ω .

On note $\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Toute combinaison linéaire, tout produit... de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ — la routine, quoi.

Exemple Les fonctions $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Du coup, toute fonction polynomiale de deux variables est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

La démonstration du résultat suivant est explicitement hors programme.

Théorème (Théorème de Schwarz) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. Alors
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ sur } \Omega.$$

*** **Attention !** L'existence de dérivées partielles secondes ne suffit pas à rendre vrai le théorème de Schwarz : l'hypothèse « de classe $\mathcal{C}^2$ » n'est pas une décoration.

Démonstration Soit $A = (x_A, y_A) \in \Omega$ fixé. Comme Ω est ouvert, $BO(A, r) \subseteq \Omega$ pour un certain $r > 0$. Posons pour tout $h = (x_h, y_h) \in BO((0, 0), r)$: $\delta(h) = f(x_A + x_h, y_A + y_h) - f(x_A + x_h, y_A) - f(x_A, y_A + y_h) + f(x_A, y_A)$. Nous allons montrer que $\lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{\delta(h)}{x_h y_h}$ vaut à la fois $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)$ — ce dont découle le résultat. Par symétrie des première et deuxième variables dans la définition de δ , il nous suffit en fait d'établir l'une de ces égalités.

- Pour tout $h = (x_h, y_h) \in BO((0, 0), r)$ tel que $x_h \neq 0$ et $y_h \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(h)}{x_h y_h} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) &= \frac{1}{x_h y_h} \left[f(x_A + x_h, y_A + y_h) - f(x_A + x_h, y_A) \right] - \frac{1}{x_h y_h} \left[f(x_A, y_A + y_h) - f(x_A, y_A) \right] - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) \\ &= \frac{1}{x_h y_h} \int_0^{y_h} \frac{\partial f}{\partial y}(x_A + x_h, y_A + t) dt - \frac{1}{x_h y_h} \int_0^{y_h} \frac{\partial f}{\partial y}(x_A, y_A + t) dt - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) \\ &= \frac{1}{x_h y_h} \int_0^{y_h} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_A + x_h, y_A + t) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_A, y_A + t) \right] dt - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) \\ &= \frac{1}{x_h y_h} \int_0^{y_h} \left[\int_0^{x_h} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_A + s, y_A + t) ds \right] dt - \frac{1}{x_h y_h} \int_0^{y_h} \left[\int_0^{x_h} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) ds \right] dt \\ &= \frac{1}{y_h} \int_0^{y_h} \left[\frac{1}{x_h} \int_0^{x_h} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_A + s, y_A + t) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) \right] ds \right] dt. \end{aligned}$$

- Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ est continue en A par hypothèse, il existe $\alpha > 0$ inférieur ou égal à r tel que pour tout $M \in \Omega$: $d(A, M) < \alpha \implies \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) \right| < \varepsilon$.

Du coup, pour tout $h = (x_h, y_h) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|h\| < \alpha$, $x_h \neq 0$ et $y_h \neq 0$:

$$\left| \frac{\delta(h)}{x_h y_h} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) \right| \leq \frac{1}{y_h} \int_0^{y_h} \left[\frac{1}{x_h} \int_0^{x_h} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_A + s, y_A + t) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A) \right| ds \right] dt \leq \frac{1}{x_h} \int_0^{y_h} \left[\int_0^{x_h} \varepsilon ds \right] dt = \varepsilon.$$

Bref : $\lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{\delta(h)}{x_h y_h} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)$ comme annoncé. ■

Les *équations aux dérivées partielles* sont une application naturelle des dérivées secondes de fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, très courantes en physique. Les équations aux dérivées partielles sont la généralisation des équations différentielles aux cas de plusieurs variables. Deux grands classiques :

- 1) l'équation des cordes vibrantes à une dimension : $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, dans laquelle la fonction $y(x, t)$ représente la position verticale à l'abscisse x et à l'instant t d'une corde vibrante mesurée par rapport à sa position au repos ;
- 2) l'équation de la chaleur à une dimension : $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, dans laquelle $T(x, t)$ représente la température à l'abscisse x et à l'instant t d'un milieu dans lequel la chaleur se propage par conduction.

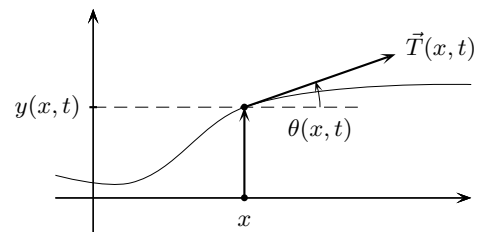
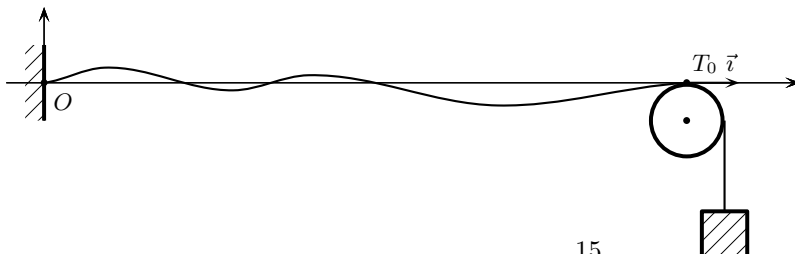
Exemple (Equation des cordes vibrantes)

- On s'intéresse aux oscillations planes d'une corde de longueur L attachée des deux côtés, de masse linéique μ homogène. Le plan des oscillations est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel les extrémités de la corde ont pour coordonnées $(0, 0)$ et $(L, 0)$.

Les oscillations de la corde sont supposées seulement transversales et l'on note $y(x, t)$ le déplacement transversal au point x à l'instant t . Par hypothèse, $y(0, t) = y(L, t) = 0$ pour tout t .

La tension exercée par la partie droite du fil sur sa partie gauche au point du fil d'abscisse x à l'instant t est notée $\vec{T}(x, t)$. Elle est tangente à la corde et l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{T}(x, t))$ est noté $\theta(x, t)$.

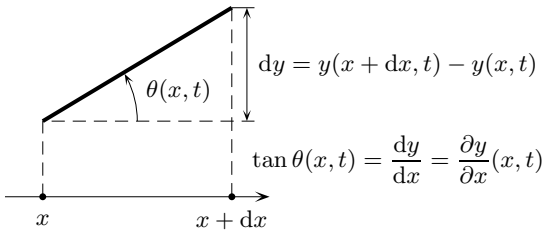
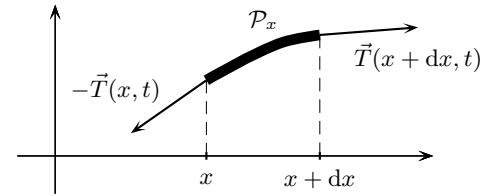
On suppose en outre que la tension en L est constante en norme de valeur T_0 , i.e. que $\|\vec{T}(L, t)\| = T_0$ pour tout t . Cette hypothèse est plausible par exemple si la corde est fixée à gauche à un mur et reliée à droite à une poulie et une masse comme l'illustre la figure ci-dessous :



Pour finir, nous effectuerons tous nos calculs au premier ordre. Cela signifie concrètement que les déplacements transverses $y(x, t)$ de la corde sont petits devant sa longueur L . En particulier l'angle $\theta(x, t)$ est petit.

- Appliquons à présent le principe fondamental de la dynamique au système matériel $\mathcal{P}_x$ de la portion de la corde située entre les points d'abscisses x et $x + dx$.

Cette portion $\mathcal{P}_x$ est soumise à deux types de contraintes : à son poids bien sûr, mais surtout à la tension exercée par le reste de la corde à gauche et à droite. Pour simplifier, nous négligerons le poids devant la tension. La force exercée par la partie droite du fil sur $\mathcal{P}_x$ est $\vec{T}(x + dx, t)$; quant à la force exercée par la partie gauche du fil, elle vaut $-\vec{T}(x, t)$ en vertu de la loi des actions réciproques.



L'angle $\theta(x, t)$ étant petit, $\frac{\partial y}{\partial x}(x, t) = \tan \theta(x, t) \approx \theta(x, t)$ l'est aussi devant 1. La longueur de $\mathcal{P}_x$ étant notée dl , le théorème de Pythagore énonce que $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \approx dx$. Ainsi la masse de $\mathcal{P}_x$ est $\mu dl \approx \mu dx$. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit donc ici : $\vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t) = \mu dx \times \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \vec{j}$. D'où, après division par dx : $\frac{\partial \vec{T}}{\partial x}(x, t) = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \vec{j}$ ★.

- Projétons ★ sur l'axe (Ox) : $\frac{\partial}{\partial x}(\|\vec{T}\| \cos \theta)(x, t) = 0$. Ainsi la quantité $\|\vec{T}(x, t)\| \cos \theta(x, t)$ ne dépend que de t . Mais l'angle $\theta(x, t)$ étant petit, $\cos \theta(x, t) \approx 1$. Du coup c'est la quantité $\|\vec{T}(x, t)\|$ qui ne dépend que de t . Comme $\|\vec{T}(L, t)\| = T_0$ pour tout t , ceci prouve que la norme de $\vec{T}$ est constante de valeur T_0 , tant vis-à-vis de x que vis-à-vis de t .
- Projétons ★ sur l'axe (Oy) : $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}(\|\vec{T}\| \sin \theta)(x, t) = T_0 \frac{\partial}{\partial x}(\sin \theta)(x, t)$. Or $\theta(x, t)$ est petit devant 1, donc $\frac{\partial y}{\partial x}(x, t) = \tan \theta(x, t) \approx \theta(x, t) \approx \sin \theta(x, t)$. Finalement $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t)$. Posant $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$, grandeur homogène à une vitesse, nous obtenons comme voulu l'équation :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (\text{équation des cordes vibrantes}).$$

- Résolvons maintenant proprement cette équation aux dérivées partielles. Soient $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $c > 0$. Faisons l'hypothèse, par analyse, que $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, et posons pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$: $f(u, v) = y\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right)$, fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$: $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right) + \frac{1}{2c} \frac{\partial y}{\partial t}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right)$, de sorte que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(u, v) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right) - \frac{1}{2c} \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right) \right] + \frac{1}{2c} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right) - \frac{1}{2c} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right) - \frac{1}{4c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right) \quad \text{via le théorème de Schwarz, puisque } y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \\ &= 0 \quad \text{puisque } \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Ce résultat montre que $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$ est nulle sur tout $\mathbb{R}^2$. Fixons $u \in \mathbb{R}$. L'application $v \mapsto \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$ est donc constante sur $\mathbb{R}$, égale à un certain réel $\alpha(u)$: $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = \alpha(u)$. La fonction α ainsi définie est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car $\frac{\partial f}{\partial u} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Notons-en a une primitive quelconque sur $\mathbb{R}$ — bien sûr, $a \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Fixons ensuite $v \in \mathbb{R}$. L'égalité $\frac{\partial f}{\partial u} = \alpha$ signifie que l'application $u \mapsto f(u, v)$ est une primitive de α sur $\mathbb{R}$, donc qu'il existe une constante $b(v)$ telle que : $\forall u \in \mathbb{R}, \quad f(u, v) = a(u) + b(v)$. La fonction b ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ car $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Finalement, nous avons trouvé deux fonctions $a, b \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad f(u, v) = a(u) + b(v)$. Mais c'est y qui nous intéresse. Soit donc $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Posons $u = x + ct$ et $v = x - ct$, de sorte que $\frac{u+v}{2} = x$ et $\frac{u-v}{2c} = t$. Alors : $y(x, t) = y\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}\right) = f(u, v) = a(u) + b(v) = a(x + ct) + b(x - ct)$.

Réciproquement — c'est le moment de la synthèse — il n'est pas difficile de vérifier que toute fonction de cette forme est solution de l'équation des cordes vibrantes.

- **Conclusion** : Pour tout $c > 0$, les solutions de l'équation des cordes vibrantes $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ sont toutes les applications $(x, t) \mapsto a(x + ct) + b(x - ct)$, a et b décrivant l'ensemble $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

5 CHAMPS DE VECTEURS ET FORMES DIFFÉRENTIELLES DE DEGRÉ 1

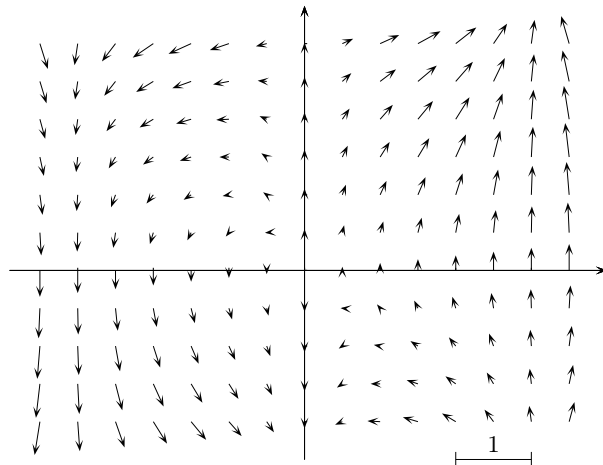
5.1 CHAMPS DE VECTEURS

Définition (Champ de vecteurs) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

- On appelle *champ de vecteurs sur Ω* toute fonction de Ω dans $\mathbb{R}^2$.
- Un champ de vecteurs $\vec{F} : (x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y))$ sur Ω est dit *continu* (reps. *de classe C^1*) sur Ω si ses composantes P et Q le sont.

Explication

On rencontre des champs de vecteurs un peu partout en physique : ainsi le champ électrique, dans le plan, est une fonction $\vec{E}$ qui, à tout point M , associe un certain vecteur $\vec{E}(M)$; de même le champ magnétique $\vec{B}$. En mécanique des fluides, on peut associer à tout point d'un écoulement stationnaire plan la vitesse du fluide en ce point. On a représenté sur la figure ci-contre le champ de vecteurs $(x, y) \mapsto (y \sin x, x + \sin y)$. La norme de chaque vecteur a été divisée par 10 pour que la figure soit lisible.



Définition (Champ de gradient et potentiel) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\vec{F}$ un champ de vecteurs sur Ω . On dit que $\vec{F}$ est un *champ de gradient sur Ω* ou que $\vec{F}$ *dérive d'un potentiel sur Ω* s'il existe une fonction $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $\vec{F} = \nabla f$. Une telle fonction f est alors appelée un potentiel de $\vec{F}$.

Explication

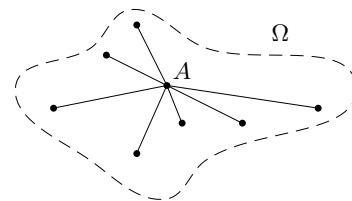
- En physique, par exemple, le champ électrostatique $\vec{E}$ dérive du potentiel électrique V — plus exactement de $-V$ car la convention de signe en mathématiques n'est pas la même qu'en physique — selon la formule « $\vec{E} = -\text{grad}V$ ».
- On parle bien d'un potentiel et non du potentiel car l'opérateur ∇ absorbe les constantes. Pour cette raison, en physique, le potentiel électrique V est toujours défini à une constante près.

Exemple Le champ de vecteurs $(x, y) \mapsto (2x + y, x)$ dérive du potentiel $(x, y) \mapsto x^2 + xy$, mais bien sûr aussi du potentiel $(x, y) \mapsto x^2 + xy + 1$.

Définition (Ouvert étoilé) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On dit que Ω est *étoilé* si : $\exists A \in \Omega / \forall M \in \Omega, [AM] \subseteq \Omega$.

Explication

Un ouvert étoilé est un ouvert dont tous les points sont accessibles, sans sortir de l'ouvert, en ligne droite à partir d'un unique point.



Exemple Toute ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^2$ est étoilé. C'est en particulier le cas des boules ouvertes, des demi-plans ouverts, des rectangles ouverts...

En effet Rappelons que, par définition, un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ est convexe si : $\forall A, B \in \Omega, [AB] \subseteq \Omega$. En particulier, un ouvert convexe non vide est étoilé par rapport à chacun de ses points.

Théorème (Caractérisation des champs de gradient) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\vec{F} = (P, Q)$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω .

- (i) Si $\vec{F}$ est un champ de gradient, alors : $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.
- (ii) **Théorème de Poincaré** : La réciproque est vraie si Ω est étoilé.

✕✕✕ Attention ! Quand on étudie un champ de vecteurs, il est intéressant de savoir s'il s'agit ou non d'un champ de gradient. C'est à cette fin l'assertion (ii) qu'on a besoin d'utiliser. N'oubliez pas l'hypothèse « étoilée » !

Démonstration

- (i) Faisons l'hypothèse que $\vec{F}$ dérive d'un potentiel f . Alors $\vec{F} = \nabla f$, donc $P = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$. Or $\vec{F}$, donc aussi P et Q , sont de classe $\mathcal{C}^1$ par hypothèse, donc f est quant à elle de classe $\mathcal{C}^2$. Du coup, en vertu du théorème de Schwarz : $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.
- (ii) Résultat admis. ■

Exemple Le champ de vecteurs $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ n'est pas un champ de gradient car si l'on note P sa première composante et Q la deuxième, les fonctions $(x, y) \mapsto \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 1$ et $(x, y) \mapsto \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = y$ ne coïncident pas.

Exemple Le champ de vecteurs $(x, y) \mapsto (1 + e^x y, e^x)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, dérive du potentiel $(x, y) \mapsto x + e^x y$.

En effet Notons $\vec{F} = (P, Q)$ le champ de vecteurs étudié. Comme $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = e^x = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et comme $\mathbb{R}^2$ est étoilé, le théorème de Poincaré montre que $\vec{F}$ est un champ de gradient.

- **Analyse** : Soit f un potentiel dont dérive $\vec{F}$.
Alors en particulier : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y) = 1 + e^x y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) = e^x$.
Primitivons la première égalité par rapport à x à y fixé. Il vient : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x + e^x y + \lambda(y)$, où λ est une certaine fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ — la constante de primitivation, qui dépend ici de y . Cette relation montre en fait que $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Dérivons alors par rapport à y à x fixé : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad e^x + \lambda'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) = e^x$. Ceci montre que la fonction λ' est nulle sur $\mathbb{R}$, donc que la fonction λ est constante sur $\mathbb{R}$. Ainsi f est la fonction $(x, y) \mapsto x + e^x y$ à une constante près.
- **Synthèse** : Tout a été fait pour que $(x, y) \mapsto x + e^x y$ soit un potentiel dont dérive $\vec{F}$.
- **Remarque** : La synthèse précédente rend a posteriori obsolète notre utilisation du théorème de Poincaré.

5.2 FORMES DIFFÉRENTIELLES DE DEGRÉ 1

Définition (Forme différentielle de degré 1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

- On appelle *forme différentielle (de degré 1) sur Ω* toute application de Ω dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Toute forme différentielle sur Ω est de la forme $P dx + Q dy$, qu'on note aussi $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, pour certaines fonctions P et Q de Ω dans $\mathbb{R}$ uniques.
- Une forme différentielle $\omega = P dx + Q dy$ sur Ω est dite *continue* (resp. *de classe $\mathcal{C}^1$*) sur Ω si ses composantes P et Q le sont.

Démonstration Nous devons montrer que toute forme différentielle sur Ω est de la forme $P dx + Q dy$ pour certaines fonctions P et Q de Ω dans $\mathbb{R}$ uniques. Donnons-nous donc une telle forme différentielle ω .

- Soit $A \in \mathbb{R}^2$. Nous savons que les formes linéaires de $\mathbb{R}^2$ sont toutes les fonctions $(x, y) \mapsto ax + by$, a et b décrivant $\mathbb{R}$. Ceci signifie que les fonctions $(x, y) \xrightarrow{dx_A} x$ et $(x, y) \xrightarrow{dy_A} y$ engendrent $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Mais la famille (dx_A, dy_A) est libre par ailleurs car si $\lambda dx_A + \mu dy_A = 0$ pour certains $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda = 0$ après évaluation en $(1, 0)$ et $\mu = 0$ après évaluation en $(0, 1)$. Nous venons de prouver que la famille (dx_A, dy_A) est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
- Notons, pour tout $A \in \Omega$, $(P(A), Q(A))$ les coordonnées de $\omega(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ dans la base (dx_A, dy_A) , de sorte que $\omega(A) = P(A) dx_A + Q(A) dy_A$. Cette construction définit naturellement deux fonctions P et Q de Ω dans $\mathbb{R}$, uniques, pour lesquelles $\omega = P dx + Q dy$. ■

☞ ☞ ☞ **Explication** D'un certain point de vue, les notions de champ de vecteurs et de forme différentielle de degré 1 sont équivalentes. Se donner un champ de vecteurs, c'est se donner deux composantes P et Q qui sont des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$; et comme nous venons de le voir, se donner une forme différentielle de degré 1, c'est aussi se donner deux telles fonctions. Par exemple, la donnée du champ de vecteurs $(x, y) \mapsto (x^2, y^3)$ équivaut à la donnée de la forme différentielle $x^2 dx + y^3 dy$.

Définition (Forme différentielle exacte) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et ω une forme différentielle sur Ω . On dit que ω est *exacte* s'il existe une fonction $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $\omega = df$. Une telle fonction f est alors appelée une primitive de ω .

☞ ☞ ☞ **Explication** Soient P et Q deux fonctions d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Notons $\vec{F}$ le champ de vecteurs (P, Q) et ω la forme différentielle $P dx + Q dy$. Alors pour toute fonction $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \vec{F} \text{ dérive du potentiel } f &\iff \vec{F} = \nabla f &\iff P = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } Q = \frac{\partial f}{\partial y} &\iff P dx + Q dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ &\iff \omega = df &\iff \omega \text{ est exacte de primitive } f. \end{aligned}$$

Exemple La forme différentielle $y dx + x dy$ est exacte, car si l'on note f la fonction $(x, y) \mapsto xy$, alors $df = y dx + x dy$. Par souci de commodité, on n'hésite pas à noter « $d(xy) = y dx + x dy$ » ce résultat. Une telle notation est un peu confuse ; comprenez bien qu'ici x désigne la fonction $(x, y) \mapsto x$ et y la fonction $(x, y) \mapsto y$.

Le théorème suivant n'est que l'adaptation au cas des formes différentielles de la caractérisation des champs de gradient.

Théorème (Caractérisation des formes différentielles exactes) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\omega = P dx + Q dy$ une forme différentielle de classe C^1 sur Ω .

(i) Si ω est exacte, alors : $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

(ii) **Théorème de Poincaré** : La réciproque est vraie si Ω est étoilé.

☒ ☒ ☒ **Attention !** Comme dans le cas des champs de vecteurs, n'oubliez pas l'hypothèse « étoilée » !

Exemple La forme différentielle $y dx + dy$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ n'est pas exacte car si l'on note P sa première composante et Q la deuxième, les fonctions $(x, y) \mapsto \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 1$ et $(x, y) \mapsto \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 0$ ne coïncident pas.

5.3 INTÉGRALE CURVILIGNE ET CIRCULATION

Définition (Chemin, lacet)

- On appelle *chemin* toute courbe paramétrée définie sur un segment.
- On dit qu'un chemin $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^2$ est *fermé* ou que c'est un *lacet* si $\gamma(a) = \gamma(b)$, i.e. si ses extrémités coïncident.

Définition (Intégrale curviligne d'une forme différentielle) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\omega = P dx + Q dy$ une forme différentielle continue sur Ω et $\gamma = (x, y) \in C^1([a, b], \mathbb{R}^2)$ un chemin à valeurs dans Ω . On appelle *intégrale (curviligne) de ω le long de γ* le réel :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \left(P(\gamma(t)) x'(t) + Q(\gamma(t)) y'(t) \right) dt.$$

Dans le cas où γ est un lacet, on note parfois ce réel $\oint_{\gamma} \omega$.

☞ ☞ ☞ **Explication** La notion d'intégrale curviligne suppose définie la notion d'intégrale que nous avons étudiée plus tôt dans l'année, mais paradoxalement elle a la prétention de la généraliser. En effet, soit $f \in C([a, b], \mathbb{R})$. Il est bien connu que le chemin $\gamma : t \mapsto (t, f(t))$ a pour support le graphe de f . Posons en outre $\omega = y dx$. Alors : $\int_{\gamma} \omega = \int_a^b f(t) \times 1 dt = \int_a^b f$. Cette égalité prouve bien que l'intégrale d'une fonction que nous connaissions est un cas particulier d'intégrale curviligne.

Exemple Si γ est le demi-cercle trigonométrique $\theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$ sur $[0, \pi]$, alors :

$$\int_{\gamma} (y \, dx - x \, dy) = \int_0^{\pi} (\sin \theta \times (-\sin \theta) - \cos \theta \times \cos \theta) \, d\theta = - \int_0^{\pi} d\theta = -\pi.$$

Théorème (Intégrale curviligne d'une forme différentielle exacte) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, ω une forme différentielle continue sur Ω et γ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans Ω .

- (i) Si ω est exacte de primitive f , $\int_{\gamma} \omega$ ne dépend que des extrémités de γ : $\int_{\gamma} \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.
- (ii) Si ω est exacte et si γ est un lacet : $\oint_{\gamma} \omega = 0$.

🔗 🔗 🔗 **Explication** Quand la forme différentielle intégrée est exacte, on a coutume de dire que son intégrale ne dépend pas du chemin suivi, autre manière de dire que seules les extrémités du chemin comptent.

Démonstration L'assertion (ii) est une conséquence immédiate de l'assertion (i) puisque $\gamma(a) = \gamma(b)$ lorsque γ est fermé. Notons $[a, b]$ le segment sur lequel $\gamma = (x, y)$ est défini. Il nous suffit donc de prouver (i).

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_{\gamma} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \, dx + \frac{\partial f}{\partial y} \, dy \right) = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \, y'(t) \right) \, dt \\ &= \int_a^b F'(t) \, dt \quad \text{si l'on note } F \text{ la fonction } t \mapsto f(x(t), y(t)) = f(\gamma(t)) \\ &= [F]_a^b = F(b) - F(a) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \end{aligned}$$

■

Exemple La forme différentielle $x \, dy$ n'est pas exacte car si γ est le cercle trigonométrique $\theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$ sur $[0, 2\pi]$, qui est un lacet, alors : $\oint_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \cos \theta \times \cos \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta \neq 0$.

Dans la définition qui suit, on note $d\vec{\ell}$ le couple (dx, dy) , i.e. le vecteur $d\vec{\ell} = dx \, \vec{i} + dy \, \vec{j}$ qui représente pour le physicien une variation infinitésimale du vecteur position.

Définition (Circulation d'un champ de vecteurs) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\vec{F} = (P, Q)$ un champ de vecteurs continu sur Ω et γ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans Ω . On appelle *circulation de $\vec{F}$ le long de γ* le réel :

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\gamma} (P \, dx + Q \, dy).$$

Dans le cas où γ est un lacet, on note parfois ce réel $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$.

🔗 🔗 🔗 **Explication**

- Nous avons vu que la donnée du champ de vecteurs $\vec{F} = (P, Q)$ est équivalente à la donnée de la forme différentielle $P \, dx + Q \, dy$. La définition précédente énonce alors simplement que la circulation d'un champ de vecteurs le long d'un chemin est égale à l'intégrale curviligne de la forme différentielle associée le long du même chemin.
- En physique, la circulation d'un champ de vecteurs est liée à celle de travail : si $\vec{F}$ est une force — donc un champ de vecteurs — le travail W de $\vec{F}$ le long du trajet γ d'un objet ponctuel sur lequel cette force s'exerce vaut : $W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$.

Le théorème suivant n'est que l'adaptation au cas des champs de vecteurs du théorème de calcul des intégrales curvilignes de formes différentielles exactes.

Théorème (Circulation d'un champ de gradient) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\vec{F}$ un champ de vecteurs continu sur Ω et γ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans Ω .

- (i) Si $\vec{F}$ dérive du potentiel f , $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ ne dépend que des extrémités de γ : $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.
- (ii) Si $\vec{F}$ dérive d'un potentiel et si γ est un lacet : $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0$.